МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Условные обозначения:
E - источники напряжения **ветвей**;
C - емкости **ветвей;**
r - сопротивления **ветвей**;
Г - индуктивности **ветвей**;

S - емкости **хорд**;
R - сопротивления **хорд**;
L - индуктивности **хорд**;
I - источники тока **хорд**.

$\mathbf{U_B} = (U_E , U_C , U_r , U_Г)^T$ - вектор напряжения **ветвей**;
$\mathbf{I_B} = (I_E , I_C , I_r , I_Г)^T$ - вектор токов **ветвей**;
$\mathbf{U_X} = (U_S , U_R , U_L , U_I)^T$ - вектор напряжения **хорд**;
$\mathbf{I_X} = (I_S , I_R , I_L , I_I)^T$ - вектор токов **хорд**;
M - матрица контуров и сечений.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M_{SE}} & \mathbf{M_{SC}} & \mathbf{M_{Sr}} & \mathbf{M_{SГ}} \\ \mathbf{M_{RE}} & \mathbf{M_{RC}} & \mathbf{M_{Rr}} & \mathbf{M_{RГ}} \\ \mathbf{M_{LE}} & \mathbf{M_{LC}} & \mathbf{M_{Lr}} & \mathbf{M_{LГ}} \\ \mathbf{M_{IE}} & \mathbf{M_{IC}} & \mathbf{M_{Ir}} & \mathbf{M_{IГ}} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{(1)}$$

Ур-ния контуров хорд (закон напряжений Кирхгофа - **ЗНК**) : $\mathbf{U_X = -M\, U_B}$, **(2)**
Ур-ния сечения ветвей (закон токов Кирхгофа - **ЗТК**) $\mathbf{I_B = M^T I_X}$, **(3)**

Метод переменных состояния без наличия топологических вырождений

Размерности векторов $\mathbf{U_X , I_X , U_B , I_B}$, а также матрицы **M** уменьшаются:

$\mathbf{U_B} = (U_E , U_C , U_r)^T$ - вектор напряжения **ветвей**;
$\mathbf{I_B} = (I_E , I_C , I_r)^T$ - вектор токов **ветвей**;
$\mathbf{U_X} = (U_R , U_L , U_I)^T$ - вектор напряжения **хорд**;
$\mathbf{I_X} = (I_R , I_L , I_I)^T$ - вектор токов **хорд**;

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M_{RE}} & \mathbf{M_{RC}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M_{LE}} & \mathbf{M_{LC}} & \mathbf{M_{Lr}} \\ \mathbf{M_{IE}} & \mathbf{M_{IC}} & \mathbf{M_{Ir}} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{(1^*)}$$

Уравнения (2) и (3) принимают вид:

$$U_R = - M_{RE} U_E - M_{RC} U_C \quad ; \qquad (4)$$
$$U_L = - M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} U_r \quad ; \qquad (5)$$
$$U_I = - M_{IE} U_E - M_{IC} U_C - M_{Ir} U_r \, ; \qquad (6)$$
$$I_E = M^T_{RE} I_R + M^T_{LE} I_L + M^T_{IE} I_I \quad ; \qquad (7)$$
$$I_C = M^T_{RC} I_R + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I \quad ; \qquad (8)$$
$$I_r = \qquad M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I \, ; \qquad (9)$$

Компонентные уравнения: $dI_L/dt = \mathbf{L}^{-1} U_L$, $dU_C/dt = \mathbf{C}^{-1} I_C$, $U_r = \mathbf{r}\, I_r$,
$U_R = \mathbf{R}\, I_R$, где **R , r, L, C** - диагональные матрицы.

В соответствии с уравнениями (4) и (8) имеем уравнение относительно U_C :

$$\frac{d\,U_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1} I_C = \mathbf{C}^{-1} (M^T_{RC} I_R + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I) = \mathbf{C}^{-1} (M^T_{RC} \mathbf{R}^{-1} U_R + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I) = \mathbf{C}^{-1} (M^T_{RC} \mathbf{R}^{-1} (- M_{RE} U_E - M_{RC} U_C) + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I); \quad (10)$$

Аналогично на основе (5) и (9) для I_L имеем:

$$\frac{d\,I_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1} U_L = \mathbf{L}^{-1} (- M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} \mathbf{r}\, I_r) = \mathbf{L}^{-1} (- M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} \mathbf{r}\, (M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I)) . \quad (11)$$

Как итог, имеем систему уравнений (10)-(11) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных U_C и I_L .

Метод переменных состояния при наличии топологических вырождений

Векторы токов и напряжений теперь сохраняют полный вид:
$\mathbf{U_B} = (U_E , U_C , U_r , U_Г)^T$, $\mathbf{I_B} = (I_E , I_C , I_r , I_Г)^T$, $\mathbf{U_X} = (U_S , U_R , U_L , U_I)^T$,
$\mathbf{I_X} = (I_S , I_R , I_L , I_I)^T$, а к компонентным уравнениям добавляются еще два:
$\mathbf{I_S} = \mathbf{S}\, d\mathbf{U_S}/dt$, $\mathbf{U_Г} = \mathbf{Г}\, d\mathbf{I_Г}/dt$. В матрице M лишь три подматрицы остаются нулевыми ($\mathbf{M_{Sr}}$, $\mathbf{M_{SГ}}$, $\mathbf{M_{RГ}}$). В соответствии с (1)-(3) интересующие топологические уравнения принимают вид:

$$U_S = - M_{SE} U_E - M_{SC} U_C \quad ; \quad (12)$$
$$U_R = - M_{RE} U_E - M_{RC} U_C - M_{Rr} U_r \quad ; \quad (13)$$
$$U_L = - M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} U_r - M_{LГ} U_Г \quad ; \quad (14)$$
$$U_I = - M_{IE} U_E - M_{IC} U_C - M_{Ir} U_r - M_{IГ} U_Г \quad ; \quad (15)$$

$$I_E = M^T_{SE} I_S + M^T_{RE} I_R + M^T_{LE} I_L + M^T_{IE} I_I \quad ; \quad (16)$$
$$I_C = M^T_{SC} I_S + M^T_{RC} I_R + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I \quad ; \quad (17)$$
$$I_r = M^T_{Rr} I_R + M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I \quad ; \quad (18)$$
$$I_Г = M^T_{LГ} I_L + M^T_{IГ} I_I \quad . \quad (19)$$

Последовательно выражаем векторы U_r , $U_Г$, I_S через векторы фазовых переменных U_C и I_L . При этом предварительно выражаем I_R через U_R , а затем с учетом (13) и через U_r .

1) Система для $\mathbf{U_r}$: $\mathbf{r}^{-1} U_r = I_r = M^T_{Rr} I_R + M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I =$
$= M^T_{Rr} \mathbf{R}^{-1} (- M_{RE} U_E - M_{RC} U_C - M_{Rr} U_r) + M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I$;
$[\mathbf{r}^{-1} + M^T_{Rr} \mathbf{R}^{-1} M_{Rr}]\, U_r = M^T_{Rr} \mathbf{R}^{-1} (- M_{RE} U_E - M_{RC} U_C) + M^T_{Lr} I_L + M^T_{Ir} I_I$.

Имеем систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге относительно U_r (хотя программа типа DECOMP вызывается один раз).

2) Система для $U_Г$: $\quad \mathbf{Г}^{-1} U_Г = \frac{d I_Г}{dt} = M^T_{LГ} \frac{d I_L}{dt} + M^T_{IГ} \frac{d I_I}{dt} =$

$$= M^T_{LГ} \mathbf{L}^{-1} (- M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} U_r - M_{LГ} U_Г) + M^T_{IГ} \frac{d I_I}{dt} .$$

$$[\mathbf{Г}^{-1} + M^T_{LГ} \mathbf{L}^{-1} M_{LГ}] U_Г = M^T_{LГ} \mathbf{L}^{-1} (- M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} U_r) + M^T_{IГ} \frac{d I_I}{dt}$$

Опять система линейных алгебраических уравнений на каждом шаге !

3) Система для I_S : $\quad \mathbf{S}^{-1} I_S = \frac{d U_S}{dt} = - M_{SE} \frac{d U_E}{dt} - M_{SC} \frac{d U_C}{dt} = - M_{SE} \frac{d U_E}{dt} -$

$$- M_{SC} \mathbf{C}^{-1} (M^T_{SC} I_S + M^T_{RC} I_R + M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I) .$$

$$[\mathbf{S}^{-1} + M_{SC} \mathbf{C}^{-1} M^T_{SC}] I_S = - M_{SE} \frac{d U_E}{dt} - M_{SC} \mathbf{C}^{-1} (M^T_{LC} I_L + M^T_{IC} I_I +$$
$$+ M^T_{RC} \mathbf{R}^{-1} (- M_{RE} U_E - M_{RC} U_C - M_{Rr} U_r)) .$$

Итак, еще одна система линейных алгебраических уравнений для I_S !

Теперь окончательно имеем систему уравнений (20)-(21) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных U_C и I_L :

$$\frac{d U_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1} (M^T_{SC} I_S + M^T_{RC} \mathbf{R}^{-1} (-M_{RE} U_E - M_{RC} U_C - M_{Rr} U_r)+M^T_{LC} I_L+M^T_{IC} I_I);$$

$$\frac{d I_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1} (- M_{LE} U_E - M_{LC} U_C - M_{Lr} U_r - M_{LГ} U_Г) .$$

Для вычисления этих производных **на каждом шаге** предварительно решаются **три** системы линейных алгебраических уравнений относительно U_r , $U_Г$, I_S . Полезно отметить, что матрицы всех трех систем симметричны и при решении могут быть использованы специальные численные методы.